Equilibre en rotation d'un solide

Ce qui il faut savoir sur...

1 le mouvement de rotation d'un solide

Quand deux points d'un solide sont immobilisés, le solide a la liberté de tourner autour d'un axe $\triangle$ passant par ces deux points.
Au cours de la rotation, les points de l'axe sont immobiles; les autres points du solide décrivent des cercles coaxiaux (fig. 1).

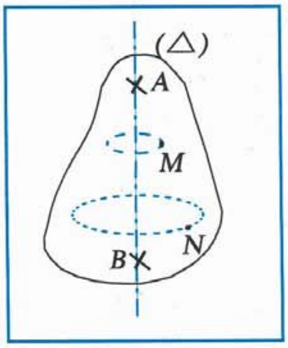


Fig. 1. Solide en rotation autour d'un axe fixe $\triangle$.

2 le moment d'une force par rapport à un axe fixe

a) Le moment d'une force caractérise l'effet de rotation de cette force sur un solide, par rapport à un axe $\triangle$ donné.

b) La valeur du moment d'une force $\vec{F}$ par rapport à un axe de rotation $\triangle$ **orthogonal** à la droite d'action est égal au produit de l'intensité de la force par la distance OH entre l'axe et la droite d'action (fig. 2).

$$\boxed{M_{\triangle(F)} = F.\ OH}$$

Unité : le moment d'une force s'exprime en N.m

c) Le signe du moment dépend du sens choisi pour la rotation.
Le moment de la force est compté positivement ou négativement selon le sens dans lequel il tend à faire tourner le solide (fig. 2).

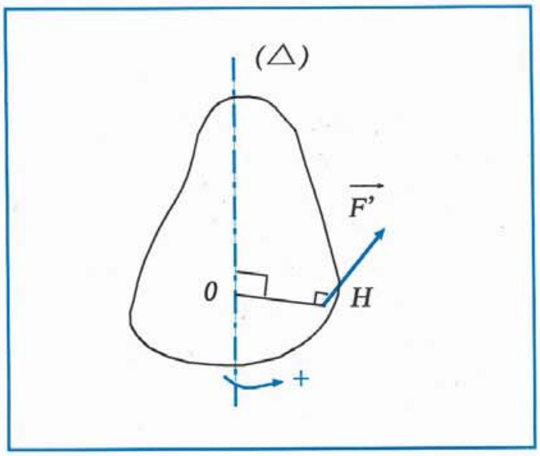


Fig. 2. Le moment de la force $\vec{F}$ est positif, compte tenu de l'orientatin chosie.

3 la condition d'équilibre en rotation d'un solide autour d'un axe fixe

a) Stabilité d'un équilibre

Un solide est en équilibre stable s'il revient dans sa position d'équilibre après en avoir été légèrement écarté (fig. 3a).
Dans le cas contraire, l'équilibre est instable (fig. 3b).

b) Théorême des moments

Quand un solide mobile autour d'un axe fixe $\triangle$ est en équilibre, la somme algébrique des moments des forces appliquées est nulle (fig.4).

$$\boxed{\Sigma\ \mathbf{M}_{\triangle(\vec{F})} = 0}$$

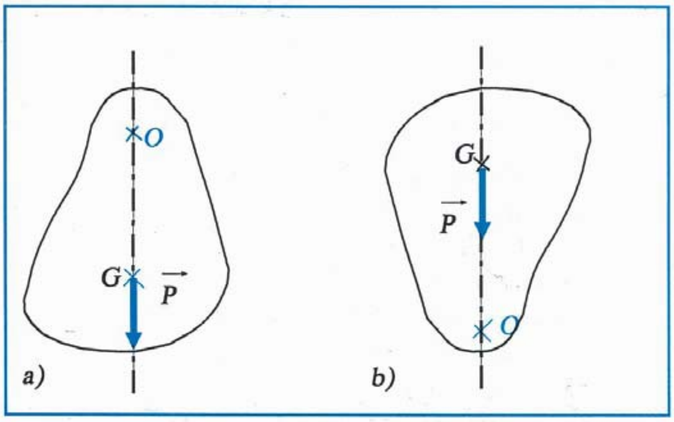


Fig. 3. Pour le solide de poids $\vec{P}$ suspendu à un axe $\triangle$ passant par O :
- l'équilibre est stable en a) ;
- l'équilibre est instable en b) ;
Dans les deux cas, le centre de gravité du solide est sur la verticale du point de suspension.

4 la condition générale d'équilibre d'un solide

Quand un solide soumis à plusieurs forces est en équilibre :
– la somme vectorielle des forces est nulle :

$$\boxed{\Sigma\vec{F} = \vec{0}\ ;}$$

– la somme algébrique des moments des forces par rapport à tout axe de rotation est nulle :

$$\boxed{\Sigma\ \mathbf{M}_{\triangle(\vec{F})} = 0}$$

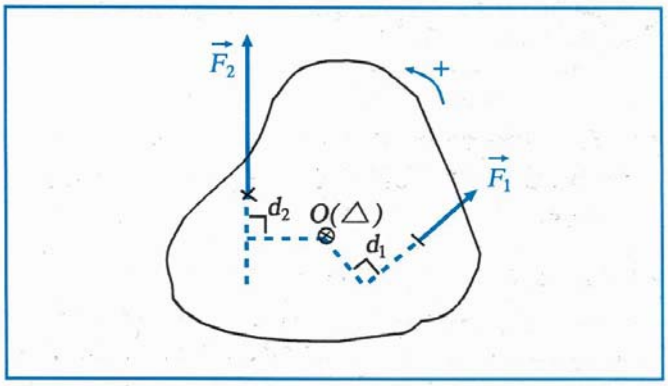


Fig. 4. Quand le solide est en équilibre :
$\mathcal{M}_{\vec{F1}/\triangle} + \mathcal{M}_{\vec{F2}/\triangle} = 0$.
Ici, $\mathcal{M}_{\vec{F1}/\triangle} > 0$ et $\mathcal{M}_{\vec{F2}/\triangle} < 0$.

Tests

Vérifiez vos connaissances sur...

1 la définition du moment d'une force

Vrai ou faux ?

a) Le moment d'une force par rapport à un axe est égal :

A. au produit de l'intensité de la force par la distance de l'axe au point d'application.

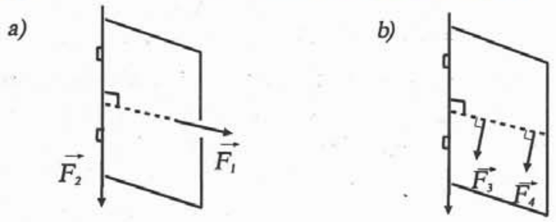
B. au quotient de l'intensité de la force par la distance de l'axe au point d'application.

C. au produit de l'intensité de la force par la distance de l'axe à la droite d'action de la force.

b) La valeur du moment d'une force s'exprime :

A. en $N.m^{-1}$; B. en N.m ; C. en kg.m

2 l'effet de rotation d'une force



a) Expliquez pour quelles raisons les forces $\vec{F_1}$ et $\vec{F_2}$ ont un effet de rotation nul sur la porte.

b) Quelle est de $\vec{F_3}$ ou de $\vec{F_4}$ ($F_3 = F_4$) celle qui a l'effet de rotation le plus important ?

3 la condition d'équilibre d'un solide autour d'un axe

Complétez les phrases suivantes :

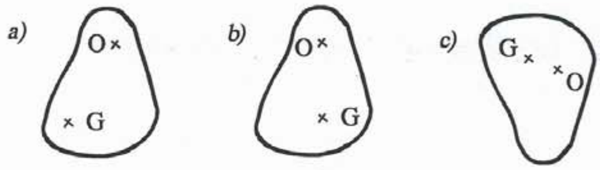
a) Quand un solide est en équilibre autour d'un axe, alors on a la relation : .... .

b) Le solide est en équilibre stable si .... .

4 la stabilité de l'équilibre

La plaque, de poids $\vec{P}$ et de centre de gravité G est mobile autour d'un axe passant par O.

Dans quel cas est-elle en équilibre ? Précisez la stabilité de cet équilibre.



5 le calcul du moment d'une force

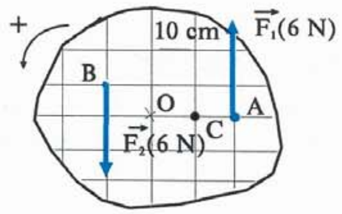
Une plaque homogène de masse négligeable est mobile autour de l'axe passant par O.

Les forces sont toutes verticales.

a) Calculez le moment de $\vec{F_1}$ par rapport à $\triangle$.

b) Calculez le moment de $\vec{F_2}$ par rapport à $\triangle$.

c) La plaque est-elle en équilibre ?



6 l'utilisation du théorème des moments

Reprenez l'énoncé de l'exercice précédent.

a) Calculez la valeur algébrique du moment d'une troisième force $\vec{F_3}$ pour que la condition d'équilibre de la plaque soit satisfaite ?

b) Quels doivent être l'intensité et le sens de $\vec{F_3}$ si elle est appliquée au point C ?

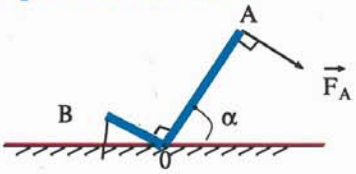
7 le calcul du moment du poids du corps

Calculez le moment du poids de la tige homogène de masse m = 1 kg et de longueur AB = 1,0 m sachant que OA = 0,20 cm.

Exercices

Appliquez vos connaissances

8 Le pied de biche



Un pied de biche dont on négligera la masse est constitué par une tige AOB coudée à angle droit. L'opérateur doit exercer une force d'intensité F_A = 250 N pour arracher le clou enfoncé dans la poutre. Calculez l'intensité F_B de la force de résistance à l'arrachement du clou.
On donne :
OA = 40 cm ; OB = 5 cm ; $\alpha = 60^\circ$.

9 L'équilibre d'une tige horizontale

Une tige AB homogène, de masse m = 2,5 kg et de longueur ℓ = 80 cm est mobile autour d'un axe fixe $\triangle$ passant par A. Elle est maintenue en équilibre horizontalement par un ressort de raideur k = 160 $N.m^{-1}$ accroché en B.

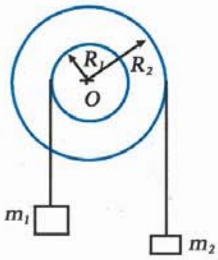
a) Déterminez les caractéristiques de la tension du ressort.

b) Quel est son allongement ?

c) Déterminez les caractéristiques de la réaction de l'axe sur la tige en A.

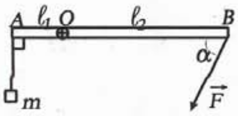
10 L'équilibre d'une poulie double

Une poulie double de rayons respectifs R_1 = 7 cm et R_2 =10 cm est soumise aux tensions de deux fils auxquels sont suspendues les masses m_1 et m_2.
Calculez la masse m_2 pour que la poulie soit en équilibre, sachant que m_1 = 560 g.



11 Exercice résolu

Une règle homogène et de masse négligeable, mobile autour d'un axe fixe ($\triangle$) *est en équilibre sous l'action* du dispositif représenté sur la figure.



On donne m = 5 kg ; ℓ_1 = 0,30 m ; ℓ_2 = 0,70 m ; $\alpha = 60^\circ$.
Calculez l'intensité de la force $\vec{F}$.

Solution

1°) Préciser le système étudié (ici, la barre) et identifier l'axe de rotation ($\triangle$).

2°) Faire le bilan des forces appliquées au système :
– la tension $\vec{T}$ du fil qui a une intensité égale au poids de la masse m ;
– la force de traction $\vec{F}$;
– la réaction de l'axe $\vec{R}$.

3°) Choisir un sens positif pour la rotation, et exprimer les moments des forces par rapport à l'axe ($\triangle$).
– Le moment de $\vec{R}$ dont la droite d'action passe par l'axe, est nul : $\mathcal{M}_\triangle(\vec{R}) = \vec{0}$.
– Le moment de la tension $\vec{T}$:
$\mathcal{M}_{\triangle(\vec{T})} = T.\ell_1 = mgl_1$.
– Le moment de la force $\vec{F}$:
$\mathcal{M}_{\triangle(\vec{F})} = -F.OH = -F.\ell_2.\sin\alpha$.

4°) Ecrire la condition d'équilibre en rotation.
$$\Sigma \mathcal{M}_{\triangle(\vec{F})} = 0 \iff \mathcal{M}_{\triangle(\vec{R})} + \mathcal{M}_{\triangle(\vec{T})} + \mathcal{M}_{\triangle(\vec{F})} = 0$$
$$\iff 0 + mg\ell_1 - F.\ell_2.\sin\alpha = 0$$

5°) En déduire l'intensité F et effectuer l'application numérique.
$$F = \frac{mg\ell_1}{\ell_2.\sin\alpha} = \frac{5 \times 9{,}8 \times 0{,}3}{0{,}70 \times \sin 60^\circ} = 24\ N.$$