

Somme de deux tensions alternatives sinusoïdales

I. Etude mathématique du problème

$$\sin(a) + \sin(b) = 2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

Exemple 1 :

$$a=t, b=t$$

$$\sin(t) + \sin(t) = 2\sin\left(\frac{t+t}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{t-t}{2}\right)$$

$$\sin(t) + \sin(t) = 2\sin\left(\frac{2t}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{0}{2}\right)$$

$$\sin(t) + \sin(t) = 2\sin(t) \cdot \cos(0)$$

$$\sin(t) + \sin(t) = 2\sin(t)$$

Exemple 2 :

$$a=t, b=t+\frac{\pi}{2}$$

$$\sin(t) + \sin\left(t+\frac{\pi}{2}\right) = 2\sin\left(\frac{t+t+\frac{\pi}{2}}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{t-(t+\frac{\pi}{2})}{2}\right)$$

$$\sin(t) + \sin\left(t+\frac{\pi}{2}\right) = 2\sin\left(\frac{2t+\frac{\pi}{2}}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{-\frac{\pi}{2}}{2}\right)$$

$$\sin(t) + \sin\left(t+\frac{\pi}{2}\right) = 2\sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right) \cdot \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\sin(t) + \sin\left(t+\frac{\pi}{2}\right) = 2\sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin(t) + \sin\left(t+\frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{2} \cdot \sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right)$$

Exemple 3 :

$$a=t, b=t+\frac{\pi}{3}$$

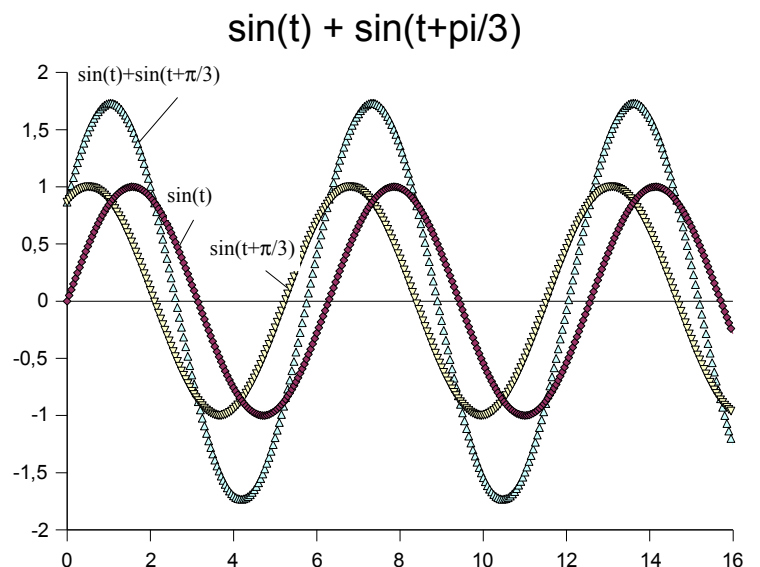
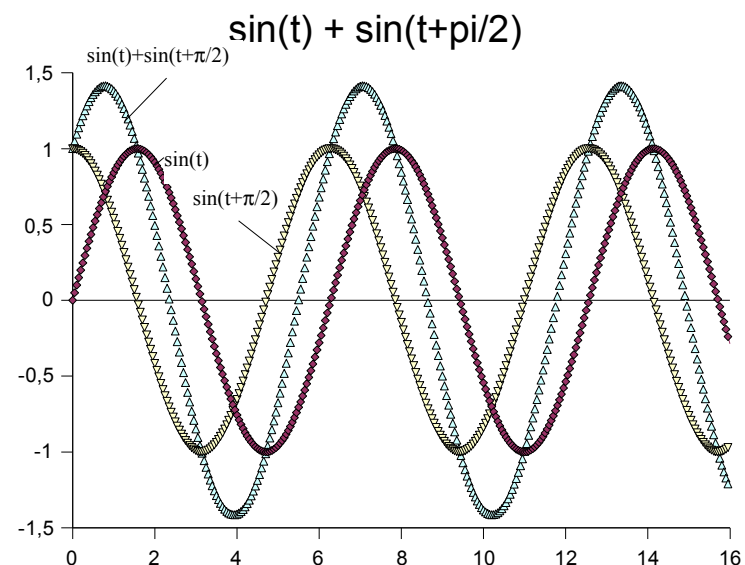
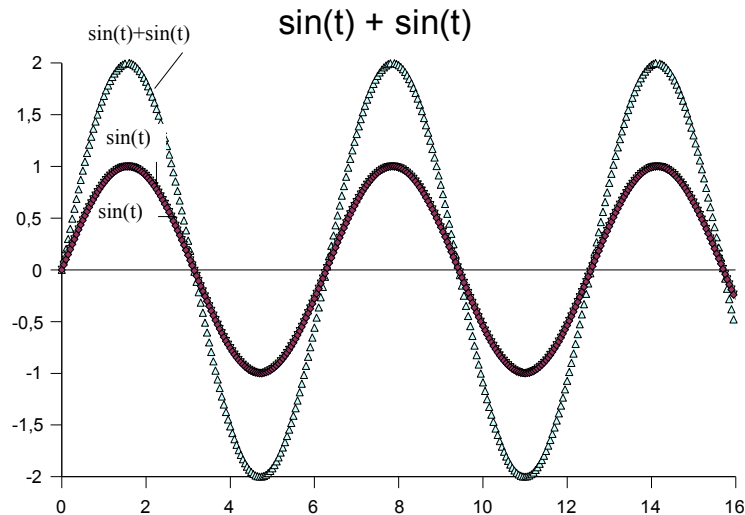
$$\sin(t) + \sin\left(t+\frac{\pi}{3}\right) = 2\sin\left(\frac{t+t+\frac{\pi}{3}}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{t-(t+\frac{\pi}{3})}{2}\right)$$

$$\sin(t) + \sin\left(t+\frac{\pi}{3}\right) = 2\sin\left(\frac{2t+\frac{\pi}{3}}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{-\frac{\pi}{3}}{2}\right)$$

$$\sin(t) + \sin\left(t+\frac{\pi}{3}\right) = 2\sin\left(t+\frac{\pi}{6}\right) \cdot \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\sin(t) + \sin\left(t+\frac{\pi}{3}\right) = 2\sin\left(t+\frac{\pi}{6}\right) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin(t) + \sin\left(t+\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3} \cdot \sin\left(t+\frac{\pi}{6}\right)$$



Exemple 4 :

$$a=t, b=t+\pi$$

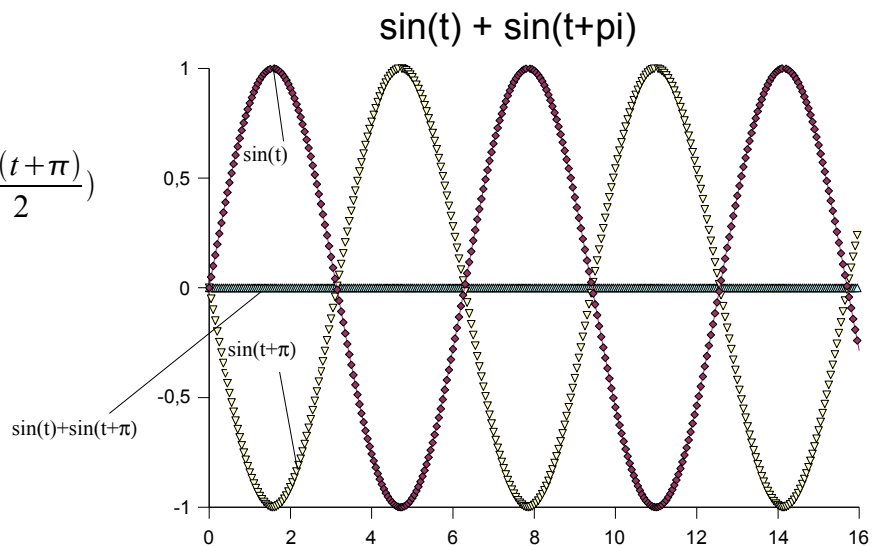
$$\sin(t) + \sin(t+\pi) = 2\sin\left(\frac{t+t+\pi}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{t-(t+\pi)}{2}\right)$$

$$\sin(t) + \sin(t+\pi) = 2\sin\left(\frac{2t+\pi}{2}\right) \cdot \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\sin(t) + \sin(t+\pi) = 2\sin\left(t+\frac{\pi}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\sin(t) + \sin(t+\pi) = 2\sin\left(t+\frac{\pi}{2}\right) \cdot 0$$

$$\sin(t) + \sin(t+\pi) = 0$$

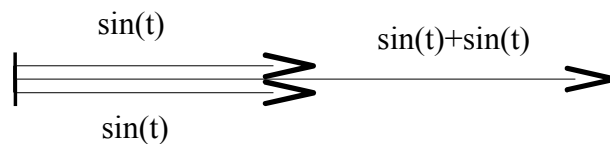


2. Etude graphique du problème

Exemple 1 :

$$a=t, b=t$$

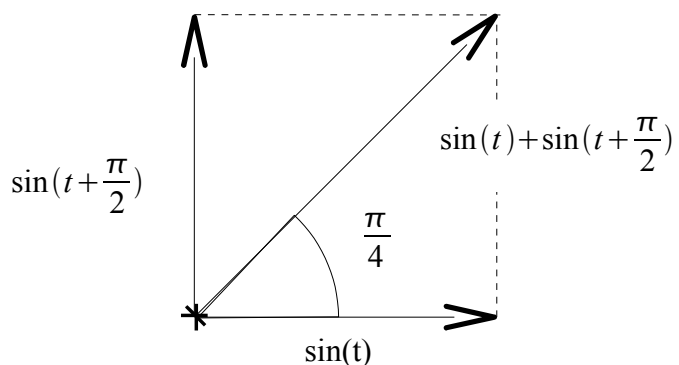
$$\sin(t) + \sin(t) = 2\sin(t)$$



Exemple 2 :

$$a=t, b=t+\frac{\pi}{2}$$

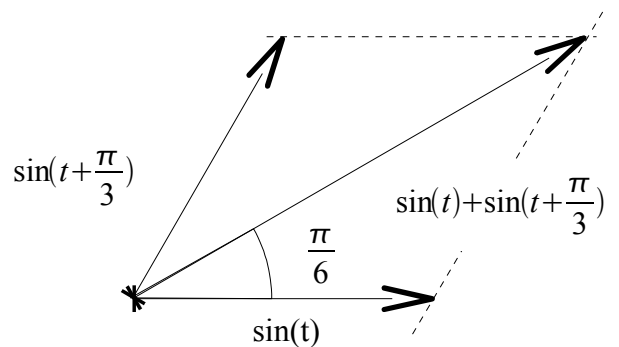
$$\sin(t) + \sin\left(t+\frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{2} \cdot \sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right)$$



Exemple 3 :

$$a=t, b=t+\frac{\pi}{3}$$

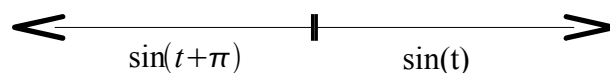
$$\sin(t) + \sin\left(t+\frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{3} \cdot \sin\left(t+\frac{\pi}{6}\right)$$



Exemple 4 :

$$a=t, b=t+\pi$$

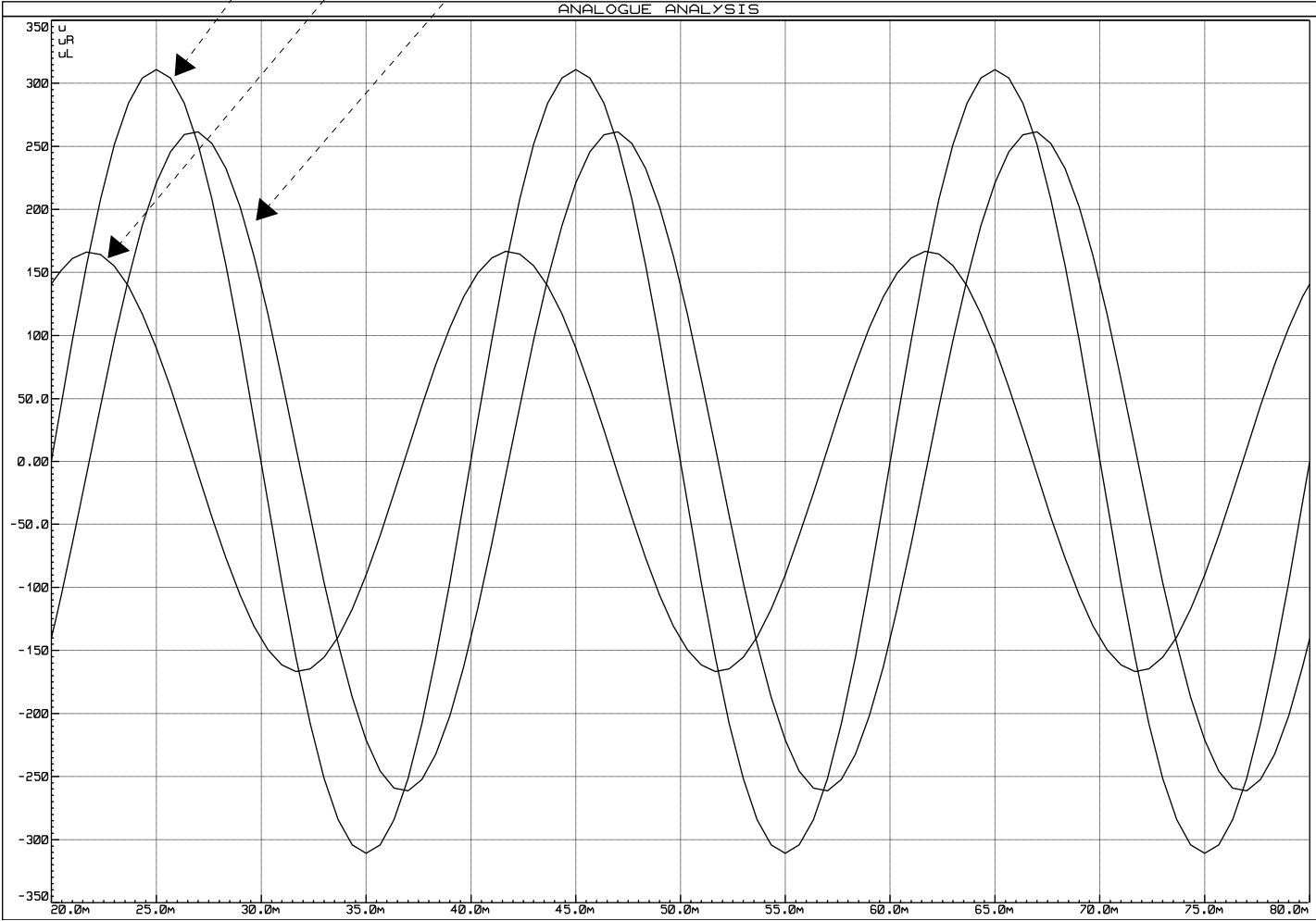
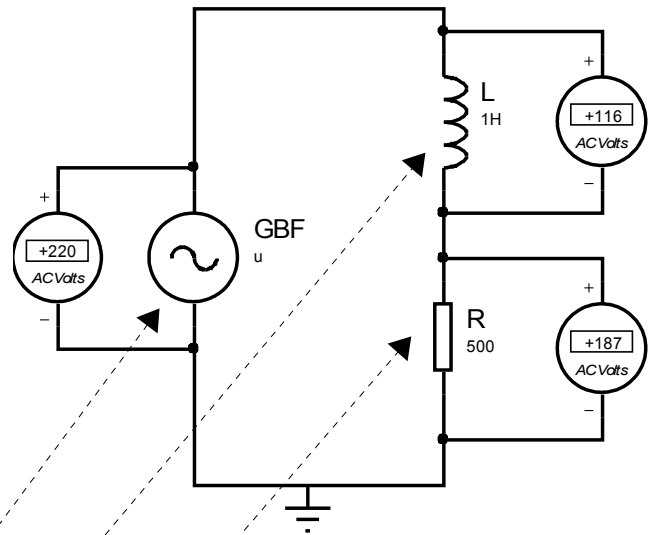
$$\sin(t) + \sin(t+\pi) = 0$$

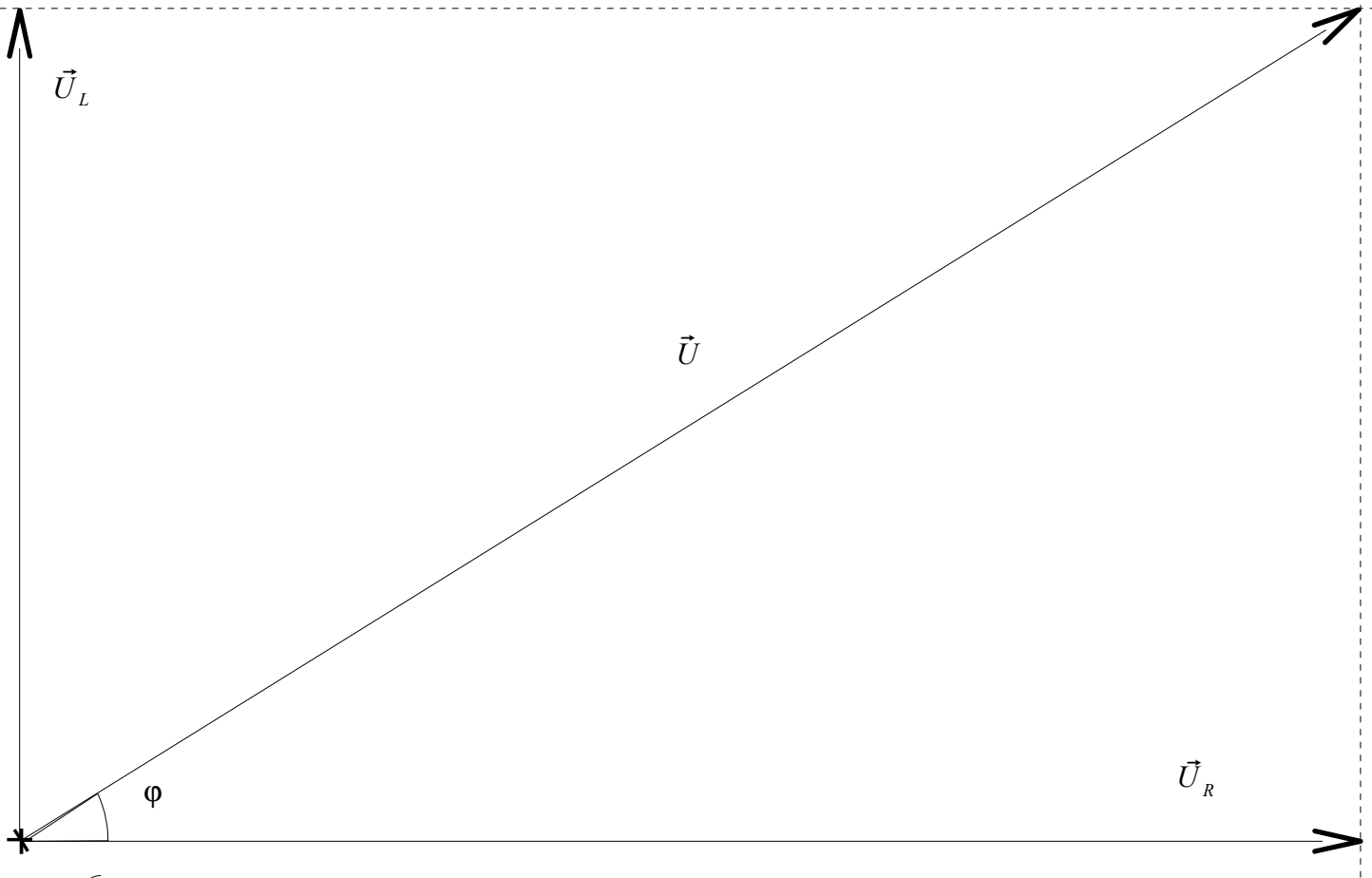


Conclusion :

1. **L'amplitude d'une somme** de deux sinusoïdes **n'est pas égale à la somme des amplitudes** de chaque sinusoïde, sauf si les deux sinusoïdes sont en phase.
2. **Si les deux sinusoïdes sont en opposition de phase**, de même amplitude, **leur somme est nulle** et a une **amplitude nulle**.
3. On trouve **l'amplitude d'une somme** de sinusoïdes **grâce à la représentation de Fresnel** de chaque sinusoïde. Celle-ci est égale au **module du vecteur somme** des deux vecteurs de Fresnel représentatifs de chaque sinusoïde.

3. Etude physique du problème





- Longueur du vecteur $\vec{U}$: $U = 220 \text{ V}$ (22 cm sur la figure)
- Longueur du vecteur $\vec{U}_R$: $U_R = 187 \text{ V}$ (18,7 cm sur la figure)
- Longueur du vecteur $\vec{U}_L$: $U_L = 116 \text{ V}$ (11,6 cm sur la figure)

On voit tout de suite que l'on n'a pas le droit d'ajouter les valeurs efficaces puisque :

$$187 \text{ V} + 116 \text{ V} = 303 \text{ V} \neq 220 \text{ V} \quad \text{Soit} \quad U_R + U_L \neq U$$

Il faut en effet tenir compte des déphasages car u_L est en quadrature avance sur u_R .

Par contre, on a le droit d'ajouter les valeurs instantanées :

$$u_R + u_L = u$$

$$u = 187 \sqrt{2} \sin(2\pi ft) + 116 \sqrt{2} \sin(2\pi ft + \frac{\pi}{2})$$

$$u = 264 \sin(314 t) + 164 \sin(314 t + \frac{\pi}{2}) \quad \text{car } f = 50\text{Hz, mais cela ne nous avance pas beaucoup !}$$

On a le droit également d'ajouter les vecteurs de Fresnel : $\vec{U}_R + \vec{U}_L = \vec{U}$

Ici, à cause du triangle rectangle, on peut utiliser le théorème de Pythagore et : $U = \sqrt{U_R^2 + U_L^2}$

$$U = \sqrt{187^2 + 116^2} \quad U = 220 \text{ V}$$

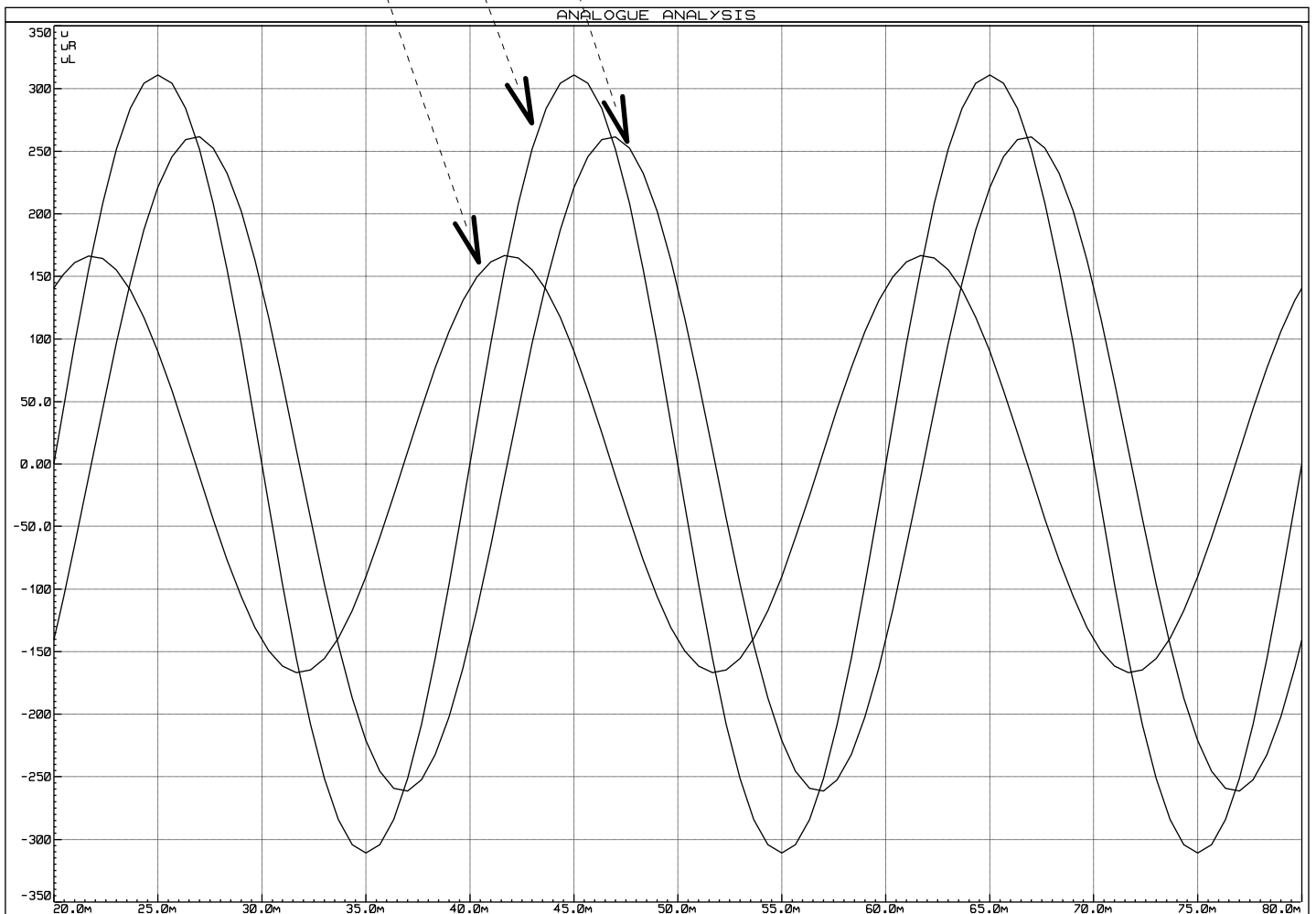
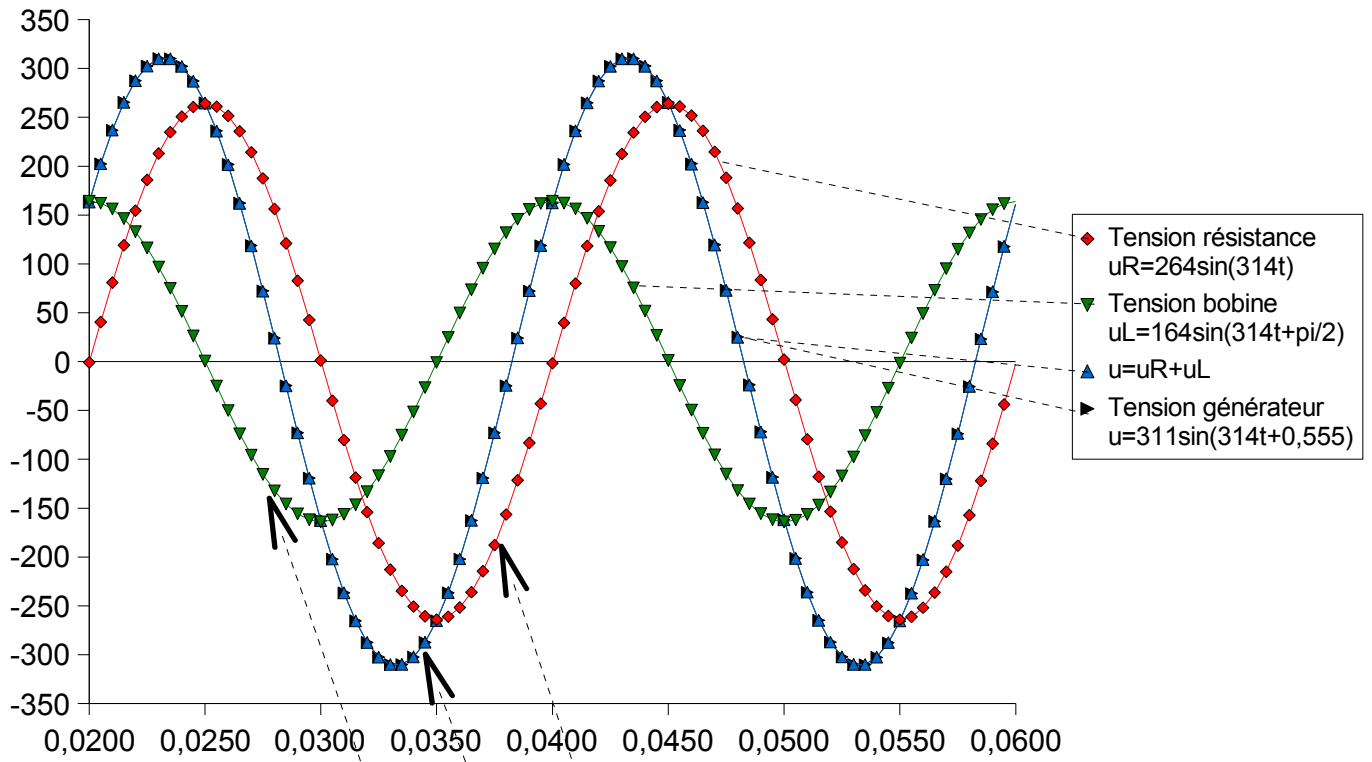
$$\tan(\varphi) = \frac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}} = \frac{U_L}{U_R} = \frac{116}{187} = 0,62$$

$$\varphi = \arctan(0,62) = 31,81^\circ = 0,555 \text{ rad}$$

$$u = 220 \sqrt{2} \sin(2\pi ft + 0,555) = 311 \sin(314 t + 0,555)$$

Grâce à Fresnel on voit que $u = u_R + u_L = 264 \sin(314 t) + 164 \sin(314 t + \frac{\pi}{2}) = 311 \sin(314 t + 0,555)$

$$u = u_R + u_L$$



On retrouve bien les courbes précédentes obtenues avec le logiciel de simulation ISIS PRO, sauf que **avec les vecteurs de Fresnel, nous avons utilisé u_R comme référence (à $t=0$, $u_R=0$)** alors que le logiciel de simulation ISIS PRO a utilisé u (tension du générateur) comme référence (à $t=0$, $u=0$).

Il faut bien comprendre que **cela revient au même**, puisque ce qui compte, c'est de connaître l'**amplitude de chacune des tensions, soit 264V pour la résistance, 164V pour la bobine et 220V pour le générateur** ainsi que les **déphasages (et les décalages) des trois tensions entre-elles** :

- u_L est en quadrature avance sur u_R , ce qui correspond à un déphasage de $+\frac{\pi}{2}$ soit $+90^\circ$ et à une avance de $\frac{90}{360} \cdot 20\text{ms} = 5\text{ms}$ sur u_R .
- De même, u est en déphasage de $+31,81^\circ$ sur u_R , ce qui correspond à une avance de $\frac{31,81}{360} \cdot 20\text{ms} = 1,77\text{ms}$ sur u_R .
- On en déduit que u_L est en avance de $5 - 1,77 = 3,23\text{ms}$ sur u .

En résumé :

$$\begin{cases} 1^{\text{er}} : u_L \\ 2^{\text{ème}} : u \text{ en retard de } 3,23\text{ ms sur } u_L \\ 3^{\text{ème}} : u_R \text{ en retard de } 5\text{ ms sur } u_L \text{ et de } 1,77\text{ ms sur } u \end{cases}$$

Remarque : Avec les vecteurs de Fresnel, **la référence** correspond à **ce qui est commun à tous les appareils**, ici l'intensité puisque c'est un **circuit série** et que tous les appareils **sont traversés par le même courant i** . Le vecteur de Fresnel de i sera horizontal, comme celui de u_R puisque u_R est en phase avec i car c'est une résistance.

